Nota: Cualquier error u omisión es responsabilidad del autor, Antonio Garre(*).

1 PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

La probabilidad trata de aproximar, mediante determinados parámetros, los posibles resultados al efectuar un experimento: así como hablamos de frecuencias en una muestra, hablaremos de probabilidad en una población.

Definición: Llamaremos **espacio muestral** de un experimento (*y lo representaremos como* Ω) al conjunto de resultados que se pueden obtener.

Definición: Llamaremos **suceso** A a un subconjunto del espacio muestral ($A \subset \Omega$).

Ejemplo

Obtener el espacio muestral de los siguientes experimentos:
a) La suma al lanzar dos dados.
b) El sexo de los hijos de una pareja.
c) Las longitudes de las alas del escarabajo de la patata.

----

a) $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
b) $\Omega = \{H, M\}$
c) $\Omega = \{R^+\}$

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Definición: Llamaremos **modelo de probabilidad** a una función $P: \Omega \to [0,1]$ (*esto es, a cada suceso A le hace corresponder un valor P(A) entre* 0 *y* 1) tal que:

a) $P(\Omega) = 1$
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son disjuntos (*esto es, si* $A \cap B = \emptyset$)

Propiedades de un modelo de probabilidad:

① $P(A^c) = 1 - P(A)$ (*donde* A^c *es el suceso contrario a A, el cual verifica que* $A \cup A^c = \Omega$ *y* $A \cap A^c = \emptyset$)
② $P(\emptyset) = 0$
③ Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$ y $P(B - A) = P(B) - P(A)$
④ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
⑤ $P(\bigcup_{j=1}^{N} A_j) = \sum_{j=1}^{N} P(A_j) - \sum_{j<i}^{N} P(A_j \cap A_i) + \ldots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{j=1}^{N} A_j)$

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Definición: Diremos que un espacio muestral es discreto si es finito ó numerable, es decir admite una representación de la forma:

a) $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ es el caso de ser finito.
b) $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ es el caso de ser infinito.

- Cuando el espacio muestral es discreto, la teoría de la probabilidad que se utiliza es la llamada **probabilidad elemental** o **probabilidad clásica**.

Las propiedades de la probabilidad, en el caso discreto, se resumen en:

a) $0 \leq P(A_j) \leq 1 \ \forall A_j$.
b) $\sum P(A_j) = 1$ (*ya sea el sumatorio finito o infinito*)
c) Si $B = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$, donde todos los sucesos son distintos, entonces $P(B) = \sum P(A_j)$.

Regla de Laplace: En el caso de que todos los sucesos sean igualmente probables, la probabilidad de un suceso B vendrá dado por: $P(B) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

Ejemplo

Hallar la probabilidad de que al tirar un dado no obtengamos ni un 3 ni un 4.

$$P(1 \cup 2 \cup 5 \cup 6) = \frac{4}{6} = 0{,}666667$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES.

Definición: La probabilidad del suceso A condicionado al suceso B (*esto es, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B ya ha ocurrido*) se define como $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Proposición: $P(A|B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener un seis al lanzar un dado:
a) Sin poseer ninguna información adicional.
b) Sabiendo que ha salido un número par.

----

a) $P(6) = \dfrac{1}{6} = 0{,}1666667$

b) $P\left(6/n^{o}\ par\right)=\dfrac{P(6\cap n^{o}\ par)}{P(n^{o}\ par)}=\dfrac{P(6)*P(n^{o}\ par/6)}{P(n^{o}\ par)}=\dfrac{\frac{1}{6}*1}{\frac{3}{6}}=0{,}33333$

Ejemplo

Se sabe que ante una determinada enfermedad, la probabilidad de caer enfermo es 1/7. Doce de cada 31 enfermos han dado positivo en una prueba, y 7 de cada 8 que dan positivo en la prueba son enfermos. ¿Cuánto es la probabilidad de dar positivo en la prueba?

P(A) = probabilidad de enfermar =1 / 7
P(B) = probabilidad de dar positivo

P(B /A) = P(dar positivo / enfermo) = 12/31
P(A/B) = P(enfermo/ dando positivo) = 7 / 8

$$P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

<u>*Definición:*</u> Diremos que dos sucesos *A* y *B* son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$ (*De un modo intuitivo son independientes si el éxito o fracaso del suceso A no afecta al éxito o fracaso del suceso B y viceversa*). En caso contrario diremos que *A* y *B* son **dependientes**.

Se verifica que si *A* y *B* son independientes, entonces $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$.

Ejemplo

Se tira un dado. ¿Son independientes los sucesos
A = "sacar un número par"
B = "sacar un número mayor o igual a cuatro" ?

P(A) = P(sacar un número par) = 1 / 6
P(B) = P(sacar un número mayor o igual a cuatro) = 3 / 6

$P(A|B)$ = P(*sacar un número par* | *el número es mayor o igual a cuatro*) = *2 / 3* ≠ $P(A)$
$P(B|A)$ = P(*sacar un número mayor o igual a cuatro* | *el número es par*) = *2 / 3* ≠ $P(B)$

Los sucesos no son independientes

REGLAS PARA EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

1. Regla de la multiplicación

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{N} A_j\right) = P(A_1)\cdot P(A_2 | A_1)\cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)\cdot\ldots\cdot P\left(A_N \middle| \bigcap_{j=1}^{N-1} A_j\right)$$

Ejemplo

Al sacar 3 cartas de la baraja española, ¿cuál es la probabilidad de que las 3 sean oros?

P(A_1) = sacar oro = 10 / 40
*P(3 cartas sean oros) = P(A_1) * P (A_2 / A_1) * P (A_3 / $A_1 \cap A_2$) = 10/40 * 9/39 * 8/38 = 0,0121*

2. Regla de la probabilidad total

Sean A_1 , A_2 , …, A_N sucesos tales que:

a) $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = \Omega$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ tal que $i \neq j$.

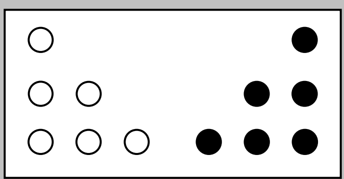
Entonces se verifica que

$$P(B) = \sum_{j=1}^{N} P(A_j)\cdot P(B | A_j)$$

Se suele utilizar cuando hay dos etapas en un experimento.

Ejemplo

Se lanza un dado de números {1, 2, 3} y el número que resulta es el número de bolas blancas que ponemos en una urna; se vuelve a lanzar poniendo tantas bolas negras como indique el resultado del lanzamiento. De la urna así formada se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?



P(B) = P(sacar bola blanca)

A_j = una de las 9 posibles combinaciones del espacio muestral. Todas las combinaciones son equiprobables por lo que la probabilidad será de 1/9.

Las probabilidades de B varían en función del espacio muestral obtenido:

1/2 1/3 1/4 2/3 2/4 2/5 3/4 3/5 3/6

$$P(B) = \sum_{j=1}^{N} P(A_j) \cdot P(B|A_j)$$

$$P(B) = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{N} P(B|A_j) = 0{,}5$$

3. Regla de Bayes

Sean A_1, A_2, …, A_N sucesos tales que:

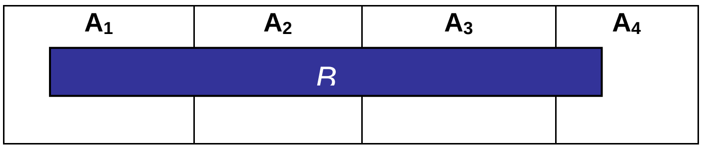
a) $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = \Omega$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

Entonces se verifica que

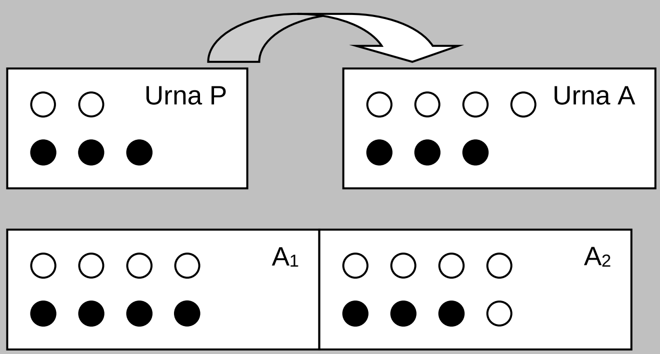
$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{j=1}^{N} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

(*Obsérvese que la fórmula anterior es una aplicación de la probabilidad condicionada y la probabilidad total*)



Ejemplo

Una urna P contiene 2 bolas blancas y 3 negras; otra urna A está compuesta de 4 blancas y tres negras. Se saca una bola al azar de la urna P y sin verla se echa a A. Seguidamente se saca una bola de A y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola pasada de P a A fuese blanca?



P(B) = P (salir bola negra)
$P(A_1)$ = P (estar en A_1) = 3/5
$P(A_2)$ = P (estar en A_2) = 2/5
$P(B / A_1)$ = 4/8
$P(B / A_2)$ = 3/8

$P(A_1 / B)$ = P (estar en A_1 / saliendo negra)

2 VARIABLES ALEATORIAS

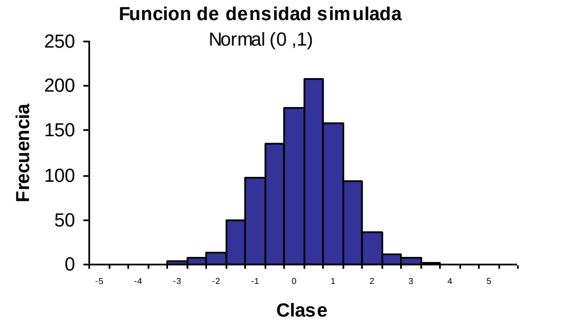
CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

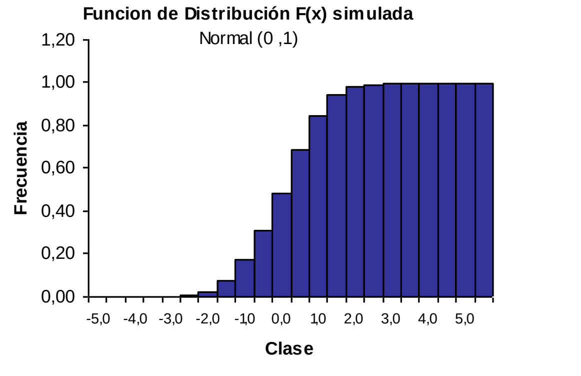
Definición: Llamaremos **variable aleatoria** a una función $\boldsymbol{X}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ que a cada elemento del espacio muestral (*correspondiente al experimento aleatorio que estamos estudiando*) le hace corresponder un número real.

> ***Ejemplo***
>
> Describir el dominio y la imagen de la variable aleatoria *"la suma de dos dados en una tirada"*

Definición: Si A es un subconjunto de **R** (*es decir, un subconjunto de la imagen de la variable **X***) entonces llamaremos **probabilidad de *A*** a $P(A) = P(X \in A) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Clase	*Frecuencia*	*% acum.*
-5,0	0	0,00
-4,5	0	0,00
-4,0	0	0,00
-3,5	0	0,00
-3,0	3	0,00
-2,5	8	0,01
-2,0	13	0,02
-1,5	50	0,07
-1,0	98	0,17
-0,5	135	0,31
0,0	175	0,48
0,5	208	0,69
1,0	159	0,85
1,5	93	0,94
2,0	36	0,98
2,5	12	0,99
3,0	8	1,00
3,5	2	1,00
4,0	0	1,00
4,5	0	1,00
5,0	0	1,00
y mayor...	0	1,00





Definición: Llamaremos **función de distribución de una variable aleatoria** a una función
$F: \mathbf{R} \rightarrow [0,1]$ definida por

$$\boxed{F^{\cdot}(x) = P(-\infty, x] = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \quad \forall x \in \mathbf{R}.}$$

Propiedades de las funciones de distribución:

① $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

② $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

③ Si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$ (Monótona no decreciente)

④ *F* es continua por la derecha, esto es, $\lim_{h\to 0^+} F(x+h) = F(x)$ (*o bien* $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$)

- La función de distribución asigna a cada número real x la probabilidad acumulada hasta ese valor x.
- Dada una función de distribución, se puede calcular la probabilidad de cualquier suceso mediante las fórmulas: $P(-\infty, x] = F(x)$ $\quad$ $P(-\infty, x) = F(x^-)$
- Dada una probabilidad, se puede definir una función de distribución y dada una función de distribución se puede determinar de forma única una probabilidad

Ejemplo

Dada la función de distribución calcule $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \end{cases}$

a) P{0}
b) P{2}
c) P(4,5]

----

a) P{0} = 0
b) P{2} = $P[2,2] = F(2) - \lim_{x\to 2^-} F(x) = 1 - 1/3 = 2/3$
c) P(4,5] = P(5)-P(4) = 1-1=0

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Definición: diremos que una **variable aleatoria es discreta** cuando sólo toma un conjunto finito o numerable de valores (x_1, x_2, …, x_n, …).

- La función de distribución de una variable aleatoria discreta queda caracterizada por su **función de masa**, (*y la representaremos como* $f(x)$) la cual está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_1) \\ P(X = x_2) \\ \vdots \\ P(X = x_n) \end{cases}$$ (*en el caso de que sean finitas*)

- La **función de distribución** estará definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ P(X = x_1), & x_1 \le x < x_2 \\ P(X = x_1) + P(X = x_2), & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1, & x_n \le x \end{cases}$$ (*en el caso de que sean finitas*)

Ejemplo

Hallar la función de masa y la función de distribución de la variable aleatoria *X* = *"número de hijos varones en familias de tres hijos"*.

----

f. masa $$f(x)=\begin{cases} 1/8 = P(H)P(H)P(H) & x=0 \\ 3/8 = P(V)P(H)P(H)+P(H)P(V)P(H)+P(H)P(H)P(V) & x=1 \\ 3/8 = P(V)P(V)P(H)+P(H)P(V)P(V)+P(V)P(H)P(V) & x=2 \\ 1/8 = P(V)P(V)P(V) & x=3 \end{cases}$$

F.distribución $$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/8 & 0\le x<1 \\ 1/2 & 1\le x<2 \\ 7/8 & 2\le x<3 \\ 1 & 3\le x \end{cases}$$

Ejemplo

Dada la siguientes función de masa, hallar:

a) Su función de distribución
b) f(5)
c) P(X ≤ 2)
d) P(X < 2)
e) P(X > 2)
f) P(X = 3)

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.01	0.1	0.3	0.4	0.1	???

Ejemplo

Por cada hora de máquina en marcha se sabe que el número de roturas X producidas en la trama de un telar tiene la probabilidad $P(X=x)=\frac{k\cdot 10^x}{x!}$, x = 0,1, …. Hallar el valor de k y la probabilidad de que se produzca alguna rotura.

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{k\cdot 10^x}{x!}=1 \qquad \Rightarrow k\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\frac{10^x}{x!}=1 \qquad \Rightarrow k=\frac{1}{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{10^x}{x!}}=\frac{1}{e^{10}}=e^{-10}$$

$$P(a\lg una\cdot rotura)=1-P(0)=1-e^{-10}$$

Medidas de centralización para una variable aleatoria discreta

Definición: Llamaremos **media** o **esperanza** de una variable aleatoria discreta X a:

$$\mu = E[X] = \sum_j x_j P(x_j)$$

Ejemplo

En un negocio un tendero puede ganar 300 euros diarios con probabilidad 0.6 o perder 100 pesetas con probabilidad 0.4. Hallar su esperanza.

Ejemplo

Un boleto de una rifa ofrece dos premios, uno de 5000 euros y otro de 2000 euros, con la probabilidad 0,001 y 0,003. ¿Cuál sería el precio justo a pagar por él?

Definición: Llamaremos **mediana** al valor o valores M tales que dejan a la izquierda y a la derecha la misma cantidad de probabilidad.

Ejemplo

Las notas de un estudiante en seis exámenes han sido 84, 91, 72, 68, 87, 78. Hallar la mediana de esas notas

----

La mediana será el valor que deje el mismo número de datos a la derecha y a la izquierda.

Medidas de dispersión para una variable aleatoria discreta

Definición: Llamaremos **varianza** de una variable aleatoria discreta al valor

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_j (x_j - \mu)^2 P(x_j)$$

Proposición: La varianza viene dada por $\sigma^2 = \sum_j x_j^2 P(x_j) - \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$

Definición: Llamaremos **desviación típica** σ de una variable aleatoria a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo

Dada la siguiente distribución, hallar su varianza y su desviación típica:

X	8	12	16	20	24
$P(X)$	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

Definición: El **momento no centrado de orden *n*** de *X* se define como $\alpha_n = E\left[X^n\right]$

Definición: El **momento centrado de orden *n*** de *X* se define como $\mu_n = E\left[(X-\mu)^n\right]$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Definición: Diremos que una **variable aleatoria es continua** cuando toma valores en un intervalo (*finito o infinito*) de **R**.

La función de distribución de una variable aleatoria discreta queda caracterizada por su **función de densidad**, (*y la representaremos como* $f(x)$) la cual verifica

- ① $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$.
- ② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Ejemplo

¿Es una función de densidad la función $f(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 0 \\ e^{-x} & si \ x \geq 0 \end{cases}$?

Si es función de densidad

$$\int_0^{\infty} e^{-x} = (-e^{-\infty}) - (-e^0) = 0 - (-1) = +1$$

- La función de distribución estará definida por $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
- A raíz del resultado anterior, se deduce que $F'(x) = f(x)$.

Teorema: Si *X* es una variable aleatoria continua, la probabilidad de un intervalo vendrá dada por la integral de la función de densidad en él, esto es,

$$P[a, b] = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo

Dada la función de densidad f(x) = $\frac{1}{2}$ – ax, donde x toma valores en el intervalo [0,4]:
a) Hallar a.
b) Hallar la función de distribución.
c) Calcular P(1 < X < 2)

----

a) $\int_0^4 \frac{1}{2} - ax = \left[\frac{1}{2}x - \frac{a}{2}x^2\right]_0^4 = \left[\frac{1}{2}(4) - \frac{a}{2}(4)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{a}{2}(0)^2\right] = 2 - 8a - 0 + 0 = 1$

$$a = \frac{1}{8}$$

b) $F(X) = \int f(x) = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x = \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{16}$

c)
$\int_1^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2\right]_0^2 = \left[\frac{1}{2}(2) - \frac{1}{16}(2)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{16}(1)^2\right] = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

Medidas de centralización para una variable aleatoria continua

<u>*Definición:*</u> Llamaremos **media** o **esperanza** de una variable aleatoria continua *X* a:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Ejemplo

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x) Calcular la media de la variable X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(1+x^2) & x \in [0,3] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} ..$$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^3 x\left(\frac{1}{12}\left(1+x^2\right)\right) = \left[\frac{\frac{1}{12}x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_0^3$

<u>*Definición:*</u> Llamaremos **mediana** al valor *M* tal que deja a la izquierda y a la derecha la misma cantidad de probabilidad, la cual verifica que *F*(*M*) = $\frac{1}{2}$.

Ejemplo

Dada la función de densidad $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + a, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$, calcular el valor de a y la mediana de f(x).

$$mediana = \int_{-\infty}^{m} f(x)dx = 0{,}5$$

Medidas de dispersión para una variable aleatoria continua

Definición: Llamaremos **varianza** de una variable aleatoria continua al valor

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Proposición: La varianza viene dada por $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$

Definición: Llamaremos **desviación típica** σ de una variable aleatoria a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo

Dada la función de densidad f(x) = $f(x) = \begin{cases} k\dfrac{x^2}{36} & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$.

Calcular:
El valor de k.
La media, la mediana, la varianza y la desviación típica.
La función de distribución.
P(|X| ≤ 2).

PROPIEDADES DE LA ESPERANZA Y LA VARIANZA

Propiedades de la esperanza:

❶ Si X e Y son dos variable aleatorias, entonces $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
❷ Si k es un escalar y X es una variable aleatoria, entonces $E[kX] = kE[X]$
❸ Si k es un escalar, entonces $E[k] = k$

Propiedades de la varianza:

❶ Si X e Y son dos variable aleatorias independientes, entonces $Var(X + Y) = Var(X)+ Var(Y)$
❷ Si k es un escalar y X es una variable aleatoria, entonces $Var(kX) = k^2\ Var(X)$
❸ Si k es un escalar, entonces $Var(k) = 0$

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Definición: Llamaremos **prueba de Bernoulli** a un experimento aleatorio cuyos posibles resultados son éxito (*con probabilidad p*) o fracaso (*con probabilidad* 1 – *p*).

La **distribución de Bernoulli** vendrá dada por la distribución de la variable aleatoria discreta

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si obtenemos éxito} \\ 0 & \text{si obtenemos fracaso} \end{cases}$$

cuya función de masa es

$$\begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}, \quad \text{o bien, } P[X=k] = p^k(1-p)^{1-k}, \; k = 0, 1$$

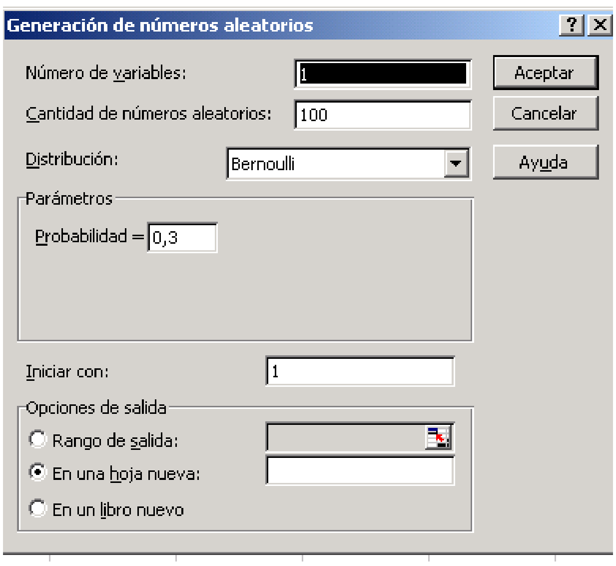
Ejemplo

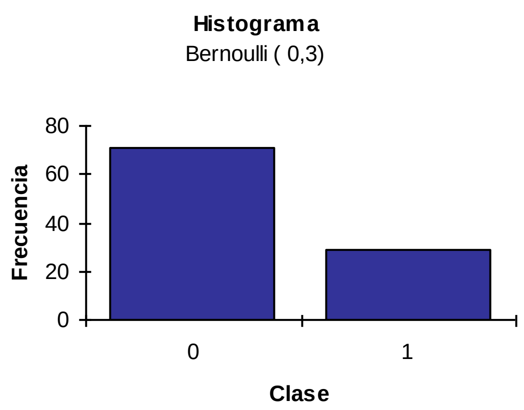
Una persona coge al azar una bola de una caja donde hay tres bolas blancas y dos negras. Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca y la de que sea negra.

Estamos ante una distribución Bernoulli donde p = probabilidad de éxito

P(x=1) = p= 3/5
P(x=0) = 1-p= 1- 3/5= 2/5

Proposición: La esperanza de la distribución de Bernoulli viene dada por $E[X] = p$.
La varianza de la distribución de Bernoulli viene dada por $V(X) = p(1-p)$.





DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

<u>*Definición:*</u> Llamaremos **distribución binomial** $B(n;\ p)$ a la distribución de la variable X = "*número de éxitos obtenidos al realizar n pruebas de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p*"

Su función de masa vendrá dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}\,, \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

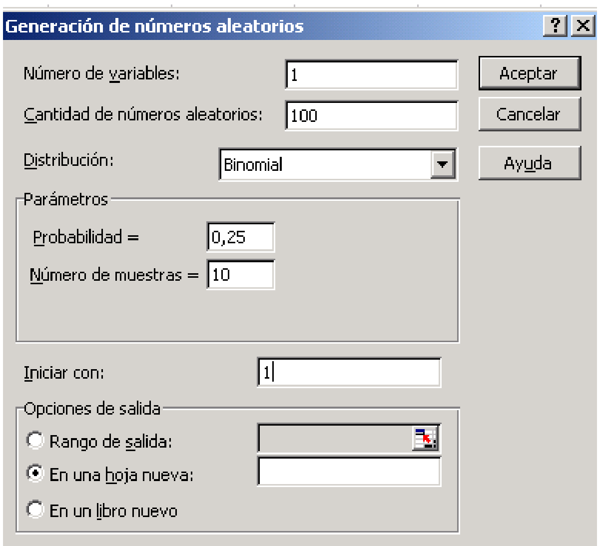
$$\text{Recuerda:} \quad \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$

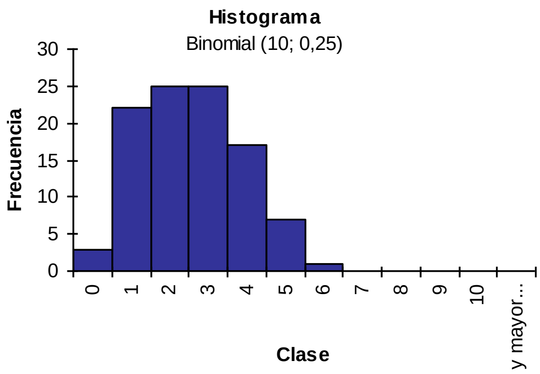
Ejemplo

Un estudiante responde al azar un examen de diez preguntas tipo test con cuatro respuestas en cada pregunta. Calcular la probabilidad de que acierte cinco preguntas y sólo 5 respuestas.

Nos está pidiendo el valor de probabilidad dado por una Binomial con probabilidad de éxito en cada pregunta es *p=1/4*
número de pruebas Bernoulli que componen la Binomial *n=10*
número de éxitos *x=5*

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \tfrac{1}{4}^{\,5}(1 - \tfrac{1}{4})^{10-5}$$





<u>*Proposición:*</u> La esperanza de la distribución binomial viene dada por $E[X] = np$.
La varianza de la distribución binomial viene dada por $V(X) = np(1 - p)$.

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener al menos cinco caras al lanzar seis veces una moneda.

----

p=1/2
n=6

$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 1/2^{5}(1 - ½)^{6-5} + \binom{6}{6} 1/2^{6}(1 - 1/2)^{6-6}$

Ejemplo

De entre 2.000 familias con 4 hijos, ¿cuántas cabe esperar que tengan:
a) al menos un niño? b) ninguna niña?

Probabilidad de éxito será igual a la probabilidad de tener un niño *p=1/2*
n=4

$P(\text{al menos un niño}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 1/2^{0}(1 - ½)^{4}$

$P(\text{ninguna niña}) = P(X = 4) = \binom{4}{4} 1/2^{4}(1 - ½)^{0}$

- La distribución Binomial posee la **propiedad aditiva**: si $X_1 \sim B(n_1, p)$, $X_2 \sim B(n_2, p)$, …, $X_k \sim B(n_k, p)$, y $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes, entonces $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim B(n_1 + n_2 + \ldots + n_k, p)$.

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

<u>*Definición:*</u> Llamaremos **distribución geométrica** a la distribución de la variable X = "*número de fracasos hasta la aparición del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p*".

Su función de masa vendrá dada por

$$P(X = x) = (1 - p)^{x}p \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de que al sacar una carta en una baraja española con reemplazamiento, se obtenga el dos de oros por primera vez en la diecisieteava vez.

<u>*Proposición:*</u> La esperanza de la distribución geométrica viene dada por $E[X] = \frac{1-p}{p}$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de que, al apostar en una ruleta siempre al número 22, obtengamos el premio en la décima tirada.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

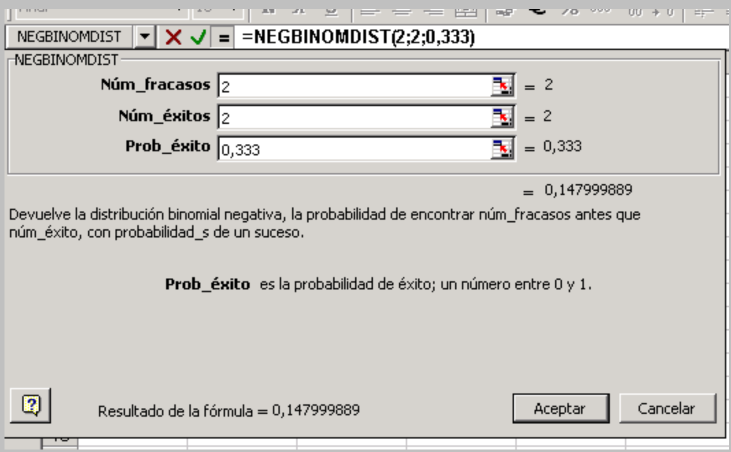
Definición: Llamaremos **distribución binomial negativa** a la distribución de la variable X = "*número de fracasos hasta la aparición del r-ésimo éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p*".

Su función de masa vendrá dada por

$$P(X = x) = \binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado de caras 1, 2 y 3, obtengamos 3 resultados distintos al tres antes de sacar 2 treses.



Proposición: La esperanza de la distribución geométrica viene dada por $E[X] = \frac{r(1-p)}{p}$

Ejemplo

Una urna contiene 20 bolas, de las cuales 12 son blancas, y las sacamos de una a una.

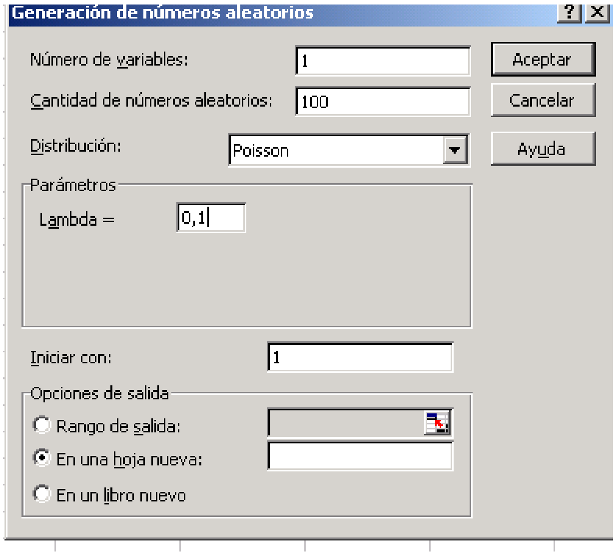
a) Hallar la probabilidad de sacar 3 bolas blancas antes de sacar la cuarta bola negra.
b) Hallar la probabilidad de sacar 6 bolas negras antes de sacar la décima bola blanca.

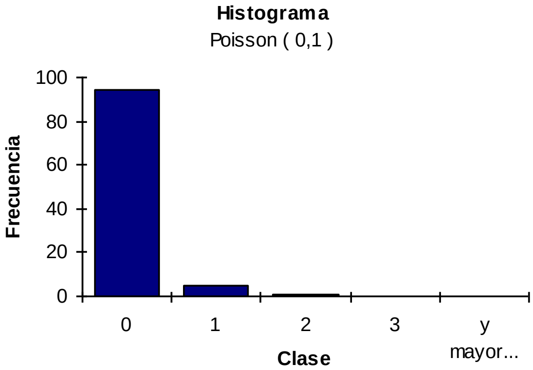
DISTRIBUCIÓN DE POISSON

En determinadas ocasiones, cuando la n es demasiado grande, los cálculos necesarios para la variable aleatoria X de distribución binomial son demasiados. Por tanto, definimos una variable X denominada de Poisson, la cual viene dada por el límite cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$ en una distribución $B(n; p)$, y $np \to \lambda$. (*Por lo general cambiaremos de una distribución binomial a una de Poisson cuando* $n \geq 30$ *y* $p \leq 0.1$)

Definición: Llamaremos **distribución de Poisson de parámetro λ** a aquella variable que tiene como función de masa

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$



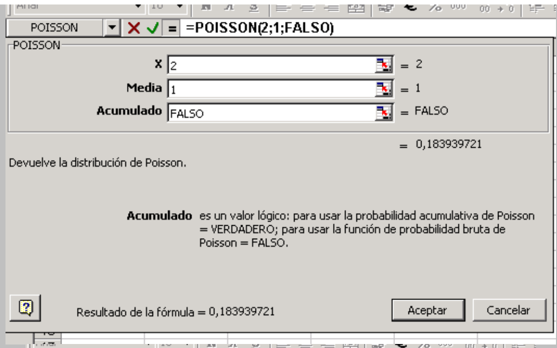


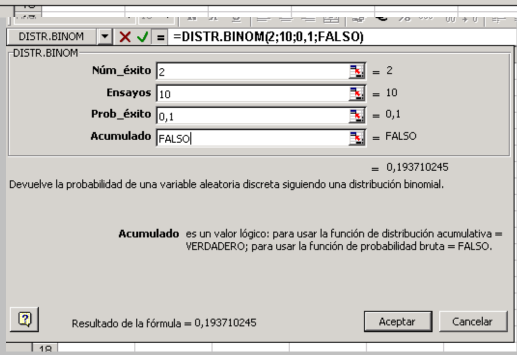
Proposición: La esperanza de una variable de Poisson viene dada por $E[X] = np = \lambda$
La varianza de una variable de Poisson viene dada por $V(X) = (np)(1 - p) = \lambda$

- La distribución de Poisson posee la **propiedad aditiva**, esto es, si $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$, …, $X_n \sim P(\lambda_n)$, y X_1, X_2, …, X_n son independientes, entonces $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$.

Ejemplo

Un 10% de las herramientas producidas en una fábrica son defectuosas. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 10 herramientas tomadas al azar exactamente 2 sean defectuosas mediante la distribución binomial y mediante la aproximación de Poisson.





Ejemplo

Si la probabilidad de que un individuo sufra una reacción negativa ante una inyección de suero es 0.001, hallar la probabilidad de que entre 2000 individuos:

a) Exactamente 3 reaccione negativamente.
b) Más de dos de ellos reacciones negativamente.

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

<u>*Definición:*</u> Sea una población con *N* elementos, de los cuales *D* son éxitos y *N* – *D* son fracasos. La **distribución hipergeométrica** es la distribución de la variable aleatoria *X* = "*número de éxitos obtenidos en n observaciones al azar de la población, sin reemplazamiento*".

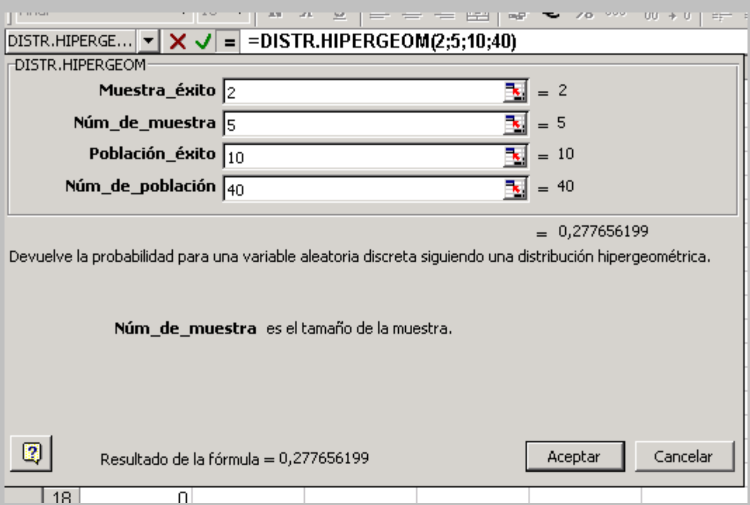
Su función de masa vendrá dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{para } \max\{0, n-(N-D)\} \le x \le \min\{n, D\}$$

<u>*Proposición:*</u> La esperanza de una variable hipergeométrica viene dada por $E[X] = \dfrac{nD}{N}$

Ejemplo

En una baraja española se sacan cinco cartas. Calcular la probabilidad de que dos de ellas sean oros.

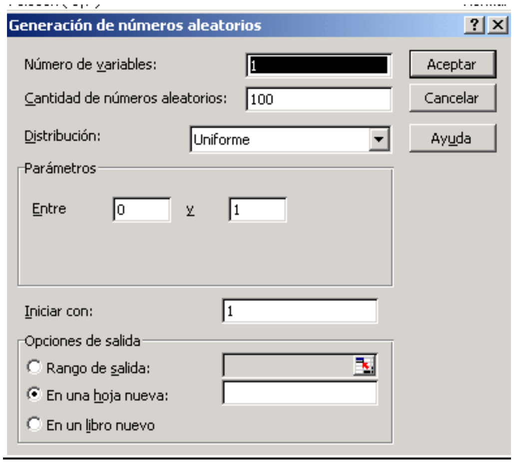


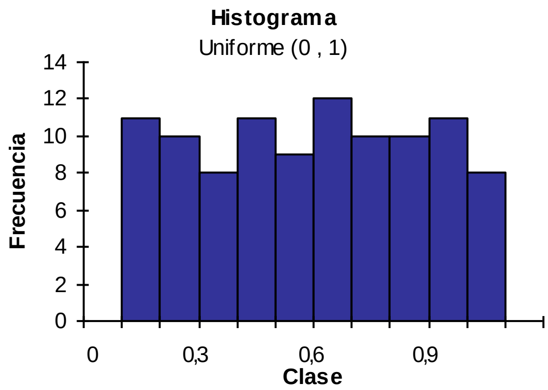
4 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

<u>*Definición:*</u> Llamaremos **distribución uniforme en el intervalo (*a*, *b*)**, y lo representaremos como *X* ~ *U*(*a*, *b*), a una variable cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \ \ x \in [a,b] \\ 0 & en\, el\ resto \end{cases}$$





<u>*Proposición:*</u> Si *X* sigue una distribución uniforme en (*a*, *b*), entonces:

a) $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$ **b)** $V[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Ejemplo

El volumen de ventas de un almacén se distribuye uniformemente entre 380 y 1200 miles de pesetas. Determinar la probabilidad de que las ventas sean superiores a un millón de pesetas.

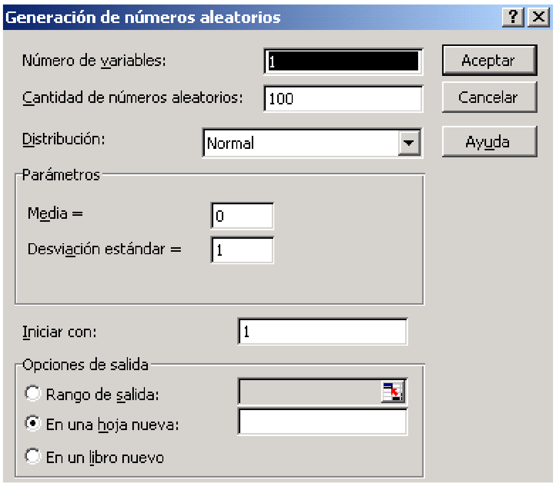
Ejemplo

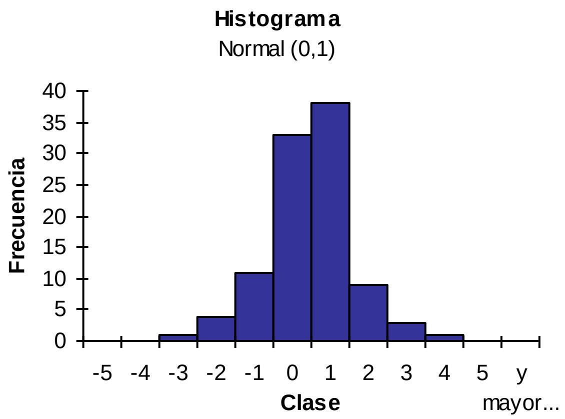
Se sabe que una variable aleatoria X posee una distribución uniforme en (a, b). Además P[X > 5] = P[X < 5], y P[X > 6] = 0.25. Hallar Var(X).

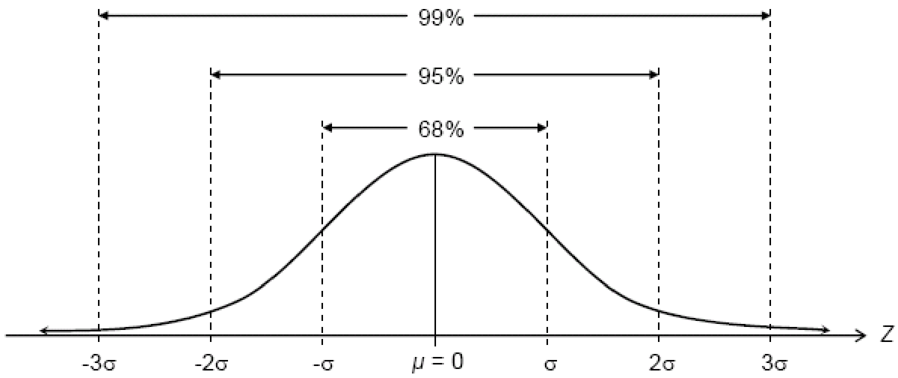
DISTRIBUCIÓN NORMAL

Definición: Llamaremos **distribución normal de parámetros μ y σ** ($-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$), y lo representaremos como $N(\mu;\ \sigma)$ al modelo continuo de probabilidad que tiene como función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$







Propiedades de la distribución normal

1. $E[X] = \mu$
2. $V(X) = \sigma^2$
3. La función de densidad es simétrica con respecto a la media μ (*esto es,* $P(X < \mu) = P(X > \mu)$)
4. Si una variable aleatoria tiene distribución $N(\mu;\ \sigma)$, entonces la variable aleatoria $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ tiene una distribución $N(0;\ 1)$.

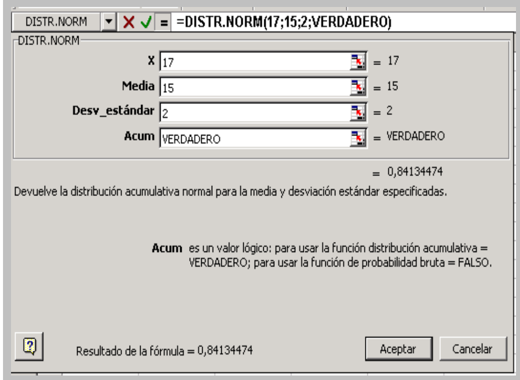
Ejemplo

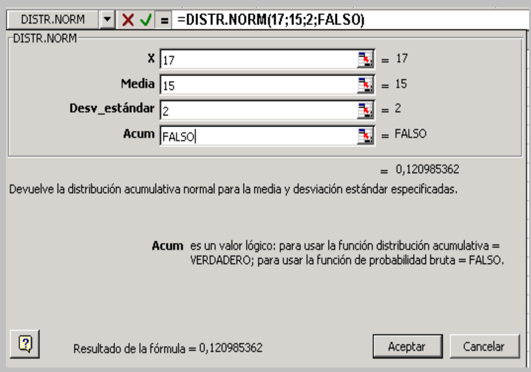
El precio medio de una palmera de chocolate entre 500 confiterías consultadas ha sido de 15 € con desviación típica de 2 € Además, los precios están normalmente distribuidos. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que en una confitería una palmera cueste más de 17 €.

b) Hallar la probabilidad de que en una confitería una palmera cueste entre 11 € y 17 €.

c) Hallar el número esperado de confiterías en las que las palmeras cuestan entre 11 € y 17 €.





----

5. La distribución binomial $B(n; p)$ tiende a la distribución normal cuando $n \to \infty$. Por tanto, cuando n es suficientemente grande, podemos trabajar con un modelo normal donde $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ (*por lo general cuando* $n \geq 30$ *y* $0.1 < p < 0,9$)

Ejemplo

Se tira un dado 100 veces. Hallar la probabilidad de obtener entre 20 y 30 caras.

----

6. Si las variable X_1, X_2, …, X_n son independientes y poseen distribuciones $N(\mu_1; \sigma_1)$, $N(\mu_2; \sigma_2)$, …, $N(\mu_n; \sigma_n)$ respectivamente, entonces la variable $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$ posee una distribución normal $N(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \ldots + \alpha_n\mu_n; \sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + \ldots + \alpha_n^2\sigma_n^2})$

DISTRIBUCION GAMMA

Definición: Llamaremos **integral gamma** al la función $\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$

Teorema: Se verifica que la integral gamma es convergente para $p > 0$.

Propiedades de la función gamma:

1. $\Gamma(1) = 1$ (*Mediante integración directa*)
2. $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$ (*Mediante integración por partes*)
3. Si n es un número natural, entonces $\Gamma(n) = (n - 1)!$ (*Mediante recurrencia con la propiedad* **2**)
4. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Definición: La función de distribución Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$ viene definida mediante la función de densidad

$$f_x(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} \quad x>0$$

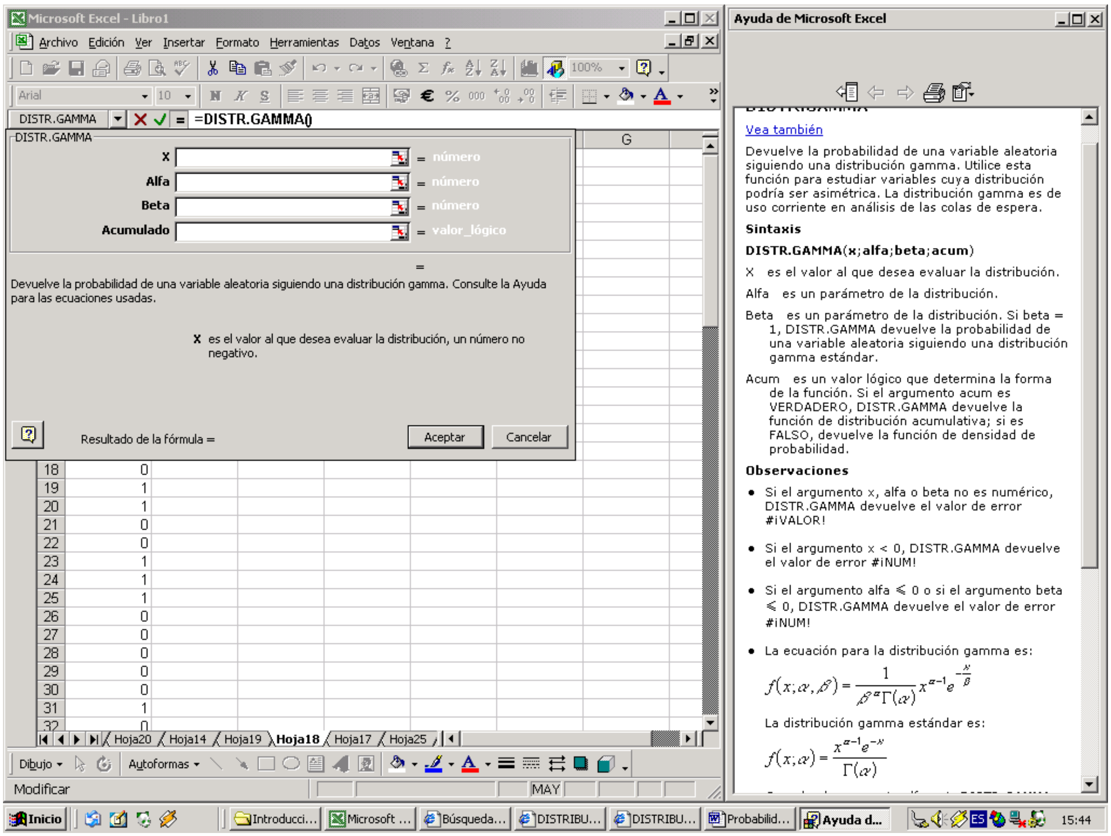
Propiedades

① $E\left[x^k\right]=\dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\beta^k$

② Si k=1 $E[x]=\alpha\beta$ $V[x]=\alpha\beta^2$

③ Sea $X\to\Gamma(\alpha,\beta)$ entonces $Y=aX\to\Gamma(\alpha,a\beta)$ $\quad a>0$

④ Sean $X_1\to\Gamma(\alpha_1,\beta)$ y $X_2\to\Gamma(\alpha_2,\beta)$ independientes entonces $X_1+X_2\to\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$



DISTRIBUCIÓN BETA

Definición: Llamaremos **integral beta** a la integral $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

Teorema: Se verifica que la integral beta es convergente para $p > 0$ y $q > 0$.

Propiedades de la integral beta:

1. $\beta(p, q) = \beta(q, p)$. (*Haciendo el cambio* $t = 1 - x$)
2. $\beta(1, q) = \frac{1}{q}$, para $q > 0$. (*A raíz de la definición*)
3. $\beta(p, q) = \frac{q-1}{p}\beta(p + 1, q - 1)$ para $p > 0$, $q > 1$. (*Integrando por partes*)
4. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Definición: $X \to \beta(p,q)$ con p,q>0 si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\beta(p,q)} & si\ x \in (0,1) \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$

Propiedades

$$E[X] = \frac{p}{p+q}$$

$$V[X] = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Definición: Es una distribución Gamma con *p* = 1, Es decir con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & si \;\; x > 0 \\ 0 & en \; el \; resto \end{cases}$$

Propiedades

Si *X* sigue una distribución exponencial (λ) entonces:

- $E[X] = \frac{1}{a}$
- $V[X] = \frac{1}{a^2}$

5 VECTORES ALEATORIOS

CONCEPTO DE VECTOR ALEATORIO

Definición: Llamaremos **vector aleatorio** a una función $(X_1, X_2, \dots, X_n)\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ que a cada elemento del espacio muestral (*correspondiente al experimento aleatorio que estamos estudiando*) le hace corresponder un vector de $\mathbf{R}^n$.

- Se considerarán solamente vectores aleatorios de dos dimensiones; el caso *n*-ésimo es análogo.

> ***Ejemplo***
>
> Describir el dominio y la imagen del vector aleatorio (X, Y), donde X = “número de caras obtenidas al lanzar dos veces una moneda” e Y = “tirada en la que fue obtenida la primera cara”
>
> ---------------------------------------

Definición: Si A es un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ (*es decir, un subconjunto de la imagen del vextor* (X, Y)) entonces llamaremos **probabilidad de *A*** a $P(A) = P((X, Y) \in A) = P\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}$

> ***Ejemplo***
>
> Sea (X, Y) vector del ejemplo anterior. Hallar P(1,0), P(2,2) y P(2,1).
>
> ---------------------------------------

Definición: Llamaremos **función de distribución de un vector aleatorio** a una función $F\colon \mathbf{R}^2 \to [0,1]$ definida por $F(x, y) = P\{(t, u) \in \mathbf{R}^2 \mid t \le x, u \le y\} = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y\} \ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(*Otra forma de expresar lo anterior sería* $F(x, y) = P\{(-\infty, x] \times (-\infty, y]\}$)

- Las propiedades de la función de distribución de un vector aleatorio son análogas a las de una variable aleatoria. Sin embargo, al considerar vectores aleatorios, es más aconsejable considerar las funciones de masa (*en el caso discreto*) y las de densidad (*en el caso continuo*) que la función de distribución.

Definición: Diremos que una **vector aleatorio es discreto** cuando sólo toma un conjunto finito o numerable de valores ((x_1 , y_1), (x_2 , y_2), …, (x_n , y_n) …).

- La función de distribución de un vector aleatorio discreto queda caracterizada por su **función de masa**, (*y la representaremos como* $f(x, y)$ la cual está definida por $f(x, y) = P(X = x;\ Y = y)$:

$X \setminus Y$	y_1	…	y_j	…	y_n
x_1	$P(X = x_1 ; Y = y_1)$	…	$P(X = x_1 ; Y = y_j)$	…	$P(X = x_1 ; Y = y_n)$
…	…	…	…	…	
x_i	$P(X = x_i ; Y = y_1)$	…	$P(X = x_1 ; Y = y_1)$	…	$P(X = x_1 ; Y = y_n)$
…	…	…	…	…	
x_m	$P(X = x_m ; Y = y_1)$	…	$P(X = x_1 ; Y = y_1)$	…	$P(X = x_m ; Y = y_n)$

(*en el caso de que sea finito*)

Distribuciones marginales

Definición: Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto. Llamaremos **distribución marginal de *X*** a la distribución obtenida al considerar exclusivamente la X. Su función de masa (*llamada función de masa marginal*) vendrá dada por:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_1) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_1; Y = y_j) \\ P(X = x_2) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_2; Y = y_j) \\ \vdots \\ P(X = x_n) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_n; Y = y_j) \end{cases} \quad \text{(en el caso de que sean finitas)}$$

De manera análoga podríamos haber definido la **distribución marginal de *Y***.

Ejemplo

Calcula las distribuciones marginales de la siguiente función de masa:

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,2	0,1
x_2	0,2	0,1	0
x_3	0	0,3	0

- Obtendremos, pues, la función de masa de la variable aleatoria X y la variable aleatoria Y, las cuales, a su vez, nos permiten hallar sus medidas de centralización y dispersión ($E[X]$, $V(X)$, $E[Y]$, $V(Y)$ …)

Distribuciones condicionadas

Definición: Llamaremos **covarianza** entre dos variables aleatorias discretas X e Y a

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])\cdot(Y - E[Y])]$$

Diremos que X e Y están **incorreladas** cuando $Cov(X, Y) = 0$

Proposición: La covarianza viene dada por $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]\cdot E[Y]$

Ejemplo 6: Calcula la covarianza del ejemplo 4 y 5.

Definición: Diremos que dos variables aleatorias discretas son **independientes** si

$$P(X = x_i\,;\ Y = y_j) = P(X = x_i)\cdot P(Y = y_j).$$

Proposición: Si X e Y son variables aleatorias discretas independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$ (**el recíproco no tiene por qué ser cierto**)

Definición: Llamaremos **distribución de la variable aleatoria *X*, condicionada por un valor fijo y_j de la variable aleatoria *Y***, a la distribución que viene dada por la función de masa condicionada:

$$f(x \mid y_j) = \begin{cases} P(X = x_1 \mid Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_1; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \\ P(X = x_2 \mid Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_2; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \\ \vdots \\ P(X = x_n \mid Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_n; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \end{cases} \quad \text{(}\textit{en el caso de que sean finitas}\text{)}$$

De manera análoga podríamos haber definido la **distribución de *Y* condicionada a un valor fijo x_i de la variable aleatoria *X***.

- En el caso de que las variables X e Y sean independientes, las distribuciones condicionadas coinciden con las distribuciones marginales correspondientes.

VECTORES ALEATORIOS CONTINUOS

Definición: Diremos que un **vector aleatorio es continuo** cuando puede tomar todos los valores de una región $A \subset \mathbf{R}^2$.

- La función de distribución de un vector aleatorio continuo queda caracterizada por su **función de densidad**, (*y la representaremos como* $f(x, y)$) la cual ha de verificar:
  - ① $f(x, y) \geq 0 \quad \forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$.
  - ② $\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\,dxdy = 1$

- Una vez dada la función de distribución, la probabilidad de un suceso $A \subset \mathbf{R}^2$ vendrá dada por

$$P(A) = \iint_A f(x, y)\,dxdy$$

- Además, se cumple que $F(x, y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$

Ejemplo

Calcular el valor de k para que la función sea de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} k & si\ 0 < y < x < 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Ejemplo

Dada la función de densidad

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in R\\ 0, & (x,y)\notin R\end{cases},$$

donde R viene dada por R = {(x, y) ∈ R2 | 0 ≤ y ≤ x si x ∈ [0,1], 0 ≤ y ≤ 2 – x si x ∈ [1,2], hallar P(A), siendo A = {(x, y) ∈ R2 | ½ ≤ y ≤ 1, –1 ≤ x ≤ 2}.

Ejemplo

Sea la función de densidad $f(x,y)=\begin{cases}1 & si\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\\ 0 & en\ el\ resto\end{cases}$. Hallar la función de distribución.

Distribuciones marginales

Definición: Sea (*X*, *Y*) un vector aleatorio continuo. Llamaremos **distribución marginal de *X*** a la distribución obtenida al considerar exclusivamente la *X*. Su función de densidad (*llamada función de densidad marginal*) vendrá dada por:

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$$

De manera análoga podríamos haber definido la **distribución marginal de *Y***.

- Al igual que en el caso discreto, las funciones de distribución marginal de *X* e *Y* nos permiten hallar sus medidas de centralización y dispersión (*E*[*X*], *V*(*X*), *E*[*Y*], *V*(*Y*) …)

Distribuciones condicionadas

Definición: Llamaremos **covarianza** entre dos variables aleatorias continuas *X* e *Y* a

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])\cdot(Y - E[Y])] = \iint_{\mathbf{R}^2} (x-E[x])\cdot(y-E[y])\,f(x,y)dxdy$$

Al igual que en el caso discreto, diremos que *X* e *Y* están **incorreladas** cuando *Cov*(*X*, *Y*) = 0

Proposición: La covarianza viene dada por $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]\cdot E[Y]$

Ejemplo 13: Calcular la covarianza del ejemplo 12.

Definición: Diremos que dos variables aleatorias continuas son **independientes** si $f(x, y) = f(x)\cdot f(y)$.

Proposición: Al igual que el caso discreto, si *X* e *Y* son variables aleatorias continuas independientes, entonces *Cov*(*X*, *Y*) = 0 (**el recíproco no tiene por qué ser cierto**).

Definición: Llamaremos **distribución de la variable aleatoria *X*, condicionada por un valor fijo *y* de la variable aleatoria *Y***, a la distribución que viene dada por la función de masa condicionada:

$$f(x|y) = f(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

De manera análoga podríamos haber definido la **distribución de *Y* condicionada a un valor fijo *x* de la variable aleatoria *X***.

Ejemplo

Dada la función de densidad $f(x,y)=\begin{cases}2 & si\ 0<y<x<1\\ 0 & en\ el\ resto\end{cases}$. Se pide:
Hallar sus distribuciones marginales.
Calcular la función de densidad de X condicionada por Y = y.
¿Son X e Y independientes?
Calcular P(X > 1/2; Y < 1/2)
Calcular P(X > 1/2; Y = 1/2)

Ejemplo

Dada $f(x,y)=\begin{cases}kx^2y(1-x) & si\ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$.
Calcular k para que sea una función de densidad.
¿Son independientes?
Calcular $f(x/Y=y)$ y $f(y/X=x)$

Ejemplo

Calcular la covarianza de la función $f(x,y)=\begin{cases}8xy & si\ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le x\\ 0 & en\ el\ resto\end{cases}$

PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y DISPERSIÓN

① $E[kX] = kE[X]$
② $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
③ $V(kX) = k^2V(X)$
④ Si X e Y están incorreladas (*o son independientes*), entonces

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

⑤ $V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$

⑥ Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$, son variables aleatorias incorreladas (*o son independientes*), entonces

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$$

⑦ $V(X - Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,_iY)$

⑧ Si X e Y son variables aleatorias incorreladas (*o son independientes*), entonces

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE

- En el caso de tener un vector aleatorio (X_1, X_2, …, X_n) en el cada componente tiene una distribución normal, diremos que posee una distribución normal multivariante. Nos centraremos sólo en vectores de dos dimensiones (*esto es,* (X, Y))

Definición: Sea el vector (X, Y), donde X e Y poseen distribuciones $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$. Entonces la **distribución normal bivariante**, que representaremos como $N(\boldsymbol{\mu}; \Sigma)$caracterizado por:

① Su vector de medias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$

② Su matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

es el modelo de probabilidad cuya función de densidad viene dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{\frac{-1}{2}\left[(x-\mu_1, y-\mu_2)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}\right]}$$

Ejemplo

Hallar la función de distribución para un vector aleatorio (X, Y), tal que X tiene una distribución N(0, 1) e Y tiene una distribución N(2, 4) y Cov(X, Y) = –1

Ejemplo

Hallar la media, la varianza y la covarianza de un vector cuyo exponente de su función de densidad es $\frac{-1}{6}\left(4(x+1)^2 - 2(x+1)(y-2) + (y-2)^2\right)$

Propiedades de la distribución normal bivariante

❶ La distribución marginal de X es $N(\mu_1; \sigma_1)$ y la distribución marginal de Y es $N(\mu_2; \sigma_2)$.

❷ La distribución de la variable Y condicionada al valor de $X = x$ es

$$N\left(\mu_2 + \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1^2}(x - \mu_1);\ \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

donde ρ es el coeficiente de correlación muestral, esto es, $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$.

(*Análogamente se podría haber definido la distribución de X condicionada por Y = y*)

❸ Si $Cov(X, Y) = 0$, entonces X e Y son linealmente independientes.

(*Recuérdese que si X e Y eran linealmente independientes, entonces siempre Cov*(X, Y) = 0; *el inverso se tiene si* (X, Y) *tienen una distribución normal*)

DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

- Consideremos un fenómeno aleatorio que puede presentarse bajo las alternativas disjuntas A_1, A_2, …, A_k tales que $P(A_j) = p_j$, donde $0 < p_j < 1$, siendo $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$. Sea ahora el vector aleatorio (X_1, X_2, …, X_k) que describe el suceso en el que de n observaciones se obtenga x_1 veces la alternativa A_1, x_2 veces la alternativa A_2, …, x_k veces la alternativa A_k, de manera que $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$. La función de masa de dicho vector aleatorio viene dada por:

$$P[X_1 = x_1;\ X_2 = x_2;\ \ldots;\ X_k = x_k] = \binom{n}{x_1; x_2; \ldots; x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

Defínción: A la distribución del vector aleatorio (X_1, X_2, …, X_k) anterior la denominaremos **distribución multinomial**, y lo representaremos como $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim M(n; p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

Ejemplo

En una ruleta francesa, ¿cuál es la probabilidad de que en 25 jugadas salga 2 veces la primera docena, 10 veces la segunda, 10 veces la tercera y 3 veces un cero?
